УДК 556.048 Вестник СПбГУ. Науки о Земле. 2021. Т. 66. Вып. 1

Стохастическая гидрология: развитие основных идей в России*

М. В. Болгов

Институт водных проблем Российской академии наук,
Российская Федерация, 119333, Москва, ул. Губкина, 3

Для цитирования: Болгов, М. В. (2021). Стохастическая гидрология: развитие основных идей в России. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Науки о Земле*, 66 (1), 19–40. https://doi.org/10.21638/spbu07.2021.102

Целью работы является оценка современного состояния научных исследований и основных результатов в области стохастической гидрологии. Разнообразные задачи научной и прикладной гидрологии решаются с помощью стохастических моделей различного типа. На основе этих же моделей разрабатываются методы получения надежных расчетных гидрологических характеристик либо достоверных гидрологических прогнозов различной заблаговременности. Большая часть водохозяйственных, строительных, экологических и прочих задач решается сегодня в рамках вероятностных моделей и статистических методов. Основные задачи стохастической гидрологии можно разделить на несколько групп. Несмотря на имевшую место в гидрологии дискуссию по вопросу применимости теории вероятностей и случайных процессов для анализа колебаний гидрометеорологических величин, проблема выбора методологии исследований остается одной из важнейших и довольно часто обсуждается в связи с аномальными проявлениями гидрологических явлений (экстремальными наводнениями, продолжительными маловодьями). Важной прикладной и теоретической задачей гидрологии является выбор одномерного распределения вероятностей. В этой части важны дискуссии как по проблеме типа новых распределений, так и по методам оценивания параметров. Рассматриваются идеи и гипотезы, позволяющие существенно увеличить надежность статистических характеристик. Климатические изменения во многих случаях являются причиной нарушений стационарности временных рядов гидрологических характеристик. Прогресс в развитии новых подходов к вероятностному моделированию связан как с известной задачей о достаточности марковской гипотезы, так и с необходимостью введения новых, более сложных моделей и байесовских методов оценивания. Статья посвящена обсуждению современного состояния этих проблем в форме научного обзора.

Ключевые слова: стохастическая гидрология, распределения вероятностей, случайные процессы, корреляционная теория, многолетние колебания, нестационарные процессы, байесовские методы.

1. Введение

Вероятностные модели и методы составляют одну из основных частей научного предмета гидрологии суши, а также в существенной мере определяют подходы

* Работа выполнена при частичном финансировании из средств государственного бюджета в рамках темы № 0147-2019-0003 государственного задания ИВП РАН (номер государственной регистрации АААА-А18-118022090105-5).

к решению прикладных инженерных задач, возникающих в различных отраслях технического знания и инженерии в целом (например в практике гидротехнического и водохозяйственного проектирования). Многолетние колебания речного стока, экстремальные гидрологические события, сезонная изменчивость стоковых характеристик, также как и многие другие процессы и явления, после появления известных работ Хазена (Hazen, 1913) и Садлера (Sudler, 1927) на протяжении последних ста лет эффективно исследуются на основе методов и моделей, созданных в различных разделах теории вероятностей и случайных процессов. Взаимодействие гидрологии суши с прикладными техническими науками естественным образом развивало представления о свойствах и закономерностях гидрологических процессов и способствовало формулированию этих закономерностей в форме, обеспечивающей реализуемость получаемых знаний при решении прикладных задач.

Довольно сложно разделить полученные за более чем столетний период гидрологические знания между фундаментальными и прикладными направлениями в гидрологии. В инженерной гидрологии получен набор вероятностных моделей, позволяющих решать множество прикладных задач, но носящих иногда весьма эмпирический характер. Инженерная гидрология занимается «обслуживанием» задач проектирования или управления техническими системами, что означает необходимость учета требований этих отраслей деятельности при формулировании гидрологических результатов. Эти требования разнообразны, но идеология, лежащая в основе взаимодействия технических и естественных наук, сформировалась на базе положений теории надежности, определяющих существо решаемых инженерно-технических задач и требований к информации о взаимодействующих процессах. Специфична и форма фиксации опыта решения задач в инженерных направлениях, которую мы называем системой нормативных документов в строительстве. Известная «жесткость» этой системы позволяет обеспечивать приемлемый в обществе уровень безопасности населения, экономики, территорий. Но также имеется и понимание ограниченности такого подхода, больших сложностей, возникающих при распространении этих идей на новые задачи, связанные, например, с учетом в проектировании и управлении экологических ограничений, с происходящими климатическими изменениями. Тем не менее попытки заменить в проектировании концепцию надежности на концепцию приемлемого риска оказались не очень успешными, и сегодня в развитии закона «О техническом регулировании» (Федеральный закон…, 2002) предусмотрено действие основанного на понятиях теории надежности технического регламента о безопасности зданий и сооружений (Федеральный закон…, 2009).

Стохастическое направление в классической гидрологии также претерпело смену различных взглядов на используемые модели и методы, которые в основном заимствовались из теории вероятностей. Существенный прогресс имел место в послевоенный период в результате внедрения в гидрологию так называемой корреляционной теории случайных процессов в различных формах. Не обошлось и без перегибов, связанных в основном с игнорированием выборочных свойств оценок параметров стохастических моделей. Основные результаты были получены в части выявления оптимальной структуры моделей случайных процессов, учитывающих в числе прочего и асимметричный (негауссовский) характер распределений стоковых характеристик.

Подводя итог вводной части, можно сделать вывод о том, что основная методологическая проблема — можно ли рассматривать колебания гидрологических величин в рамках теории вероятностей и случайных процессов и какие модели являются предпочтительными — сегодня практически не обсуждается, а дискуссия на эту тему, состоявшаяся в 1952–1953 гг., предается забвению, несмотря на существенное накопление данных, развитие методов теории вероятностей, очевидное усложнение возникающих водохозяйственных проблем, необходимость решения новых водно-экологических задач.

Из большого числа проблем стохастической гидрологии обсудим далее лишь некоторые основные, связанные как с актуальными научными вопросами, так и с практическими приложениями.

2. Одномерные распределения вероятностей: есть ли прогресс и новые модели?

Проблема выбора типа одномерного распределения стоковой характеристики и оценки его параметров является основной в инженерной гидрологии начиная с первых случаев применения вероятностных методов. С сороковых годов прошлого века сформировались представления о возможном типе таких распределений, значимые до сегодняшних дней. Это требование положительности и в общем неограниченности сверху, а также невысокой сложности в соответствии с провозглашенным Витом Клемешем принципом «скупости» (Klemes, 1978). Основной подход к построению одномерных распределений базировался на преобразовании одного из известных законов (как правило, это были кривые из семейства Пирсона) или путем каких-то функциональных преобразований (как, например, в задаче определения функции распределения наполнения водохранилища, сводящейся к решению интегрального уравнения регулирования стока). Начиная с работ С. Н. Крицкого и М. Ф. Менкеля (1946) известно трехпараметрическое гамма-распределение, широко применяемое в отечественной гидрологии. Близкое по своим свойствам лог-пирсоновское распределение, получаемое путем логарифмической замены переменной в двухпараметрическом гамма-распределении, широко распространено в американской гидрологии.

Из относительно новых подходов следует упомянуть функции распределения, пришедшие в гидрологию из теории экстремальных значений. Начиная с работ Б. В. Гнеденко известны три области «притяжения» распределений экстремумов, которым соответствуют модели Вейбула, Фреше и Гумбеля (Embrechts et al., 1997). Эти известные и широко используемые в зарубежной гидрологии распределения вероятностей в отечественной гидрологии пока существенного распространения не получили, хотя и упоминаются в некоторых работах по климатологии.

Попытки получить закон распределения стоковой характеристики исходя из других принципов, например, наибольшей энтропии, большого успеха также не имели. Поскольку распределение Крицкого и Менкеля было декларировано нормативными документами в качестве основного (СНиП 2.01.14-83, 1984; СП 33-101-2003, 2004), усилия гидрологов в последующие годы были направлены на разработку новых методов оценивания параметров, изучение выборочных свойств оценок (Блохинов, 1974, Рождественский и Чеботарев, 1974). Из последних результатов можно отметить применение метода т. н. L-моментов для этого распределения, разработку процедур усечения, развитие двумерных распределений с маргинальными трехпараметрическими плотностями. Некоторые их этих результатов рассмотрим далее.

В ряде случаев анализа гидрологических характеристик оказалось невозможным подобрать одно распределение, одинаково хорошо описывающее исходные данные во всем диапазоне. Особенно это заметно при исследовании распределений в зоне экстремальных характеристик стока. Одно из возможных решений состоит в использовании смеси распределений. В работе М. В. Болгова и В. Ф. Писаренко (1999) рассмотрена смесь двух распределений: нормального и степенно́го (распределения Парето). В качестве смеси распределений может выступать любая комбинация плотностей вероятности при условии ее неотрицательности и равенстве единице интеграла по области определения. Существенное увеличение сложности таких моделей нецелесообразно в связи с ростом случайных ошибок определения параметров, поэтому в гидрологии сумма более чем двух компонентов обычно не рассматривается.

В качестве первой компоненты смеси, для области средних значений, использовалась положительная часть нормального распределения с нулевым средним и с неизвестной дисперсией σ^2, а в качестве второй — использовалось «тяжелохвостовое» распределение Парето (Писаренко и Родкин, 2007).

Плотность вероятности такой смеси имеет вид

$$\psi(x,\lambda,\sigma,\beta)=\lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sigma}e^{-\frac{x}{2\sigma^2}}+(1-\lambda)\frac{\beta\overline{Q}^{\beta}}{(Q+x)^{1+\beta}},\ x\geq 0, \tag{1}$$

где σ, β, λ — параметры распределения вероятностей, Q — медиана исходной выборки.

Таким образом, смесь характеризуется тремя параметрами, подлежащими оценке. При $\lambda\to 1$ и $\lambda\to 0$ оценки максимального правдоподобия становятся неустойчивыми. Когда параметр $\lambda\to 0$, в смеси преобладает компонента распределения Парето. В таких случаях рекомендовано использовать среднерайонное значение λ. Анализ данных по максимальному стоку Приморья показал, что особо «тяжелохвостовых» распределений не удалось обнаружить.

В связи с тем, что низкий и высокий стоки на реках формируются под влиянием различных факторов, целесообразно исключать из рассмотрения паводки с низкими значениями, т. е. использовать так называемые «усеченные распределения» с целью исключения данных, которые не содержат информации, уточняющей оценки распределения вероятностей высоких паводков (Блохинов, 1974). Из относительно новых результатов можно упомянуть усечение трехпараметрического гамма-распределения, рассмотренное в работе М. В. Болгова и И. О. Сарманова (1988).

Если существует плотность вероятности случайной величины ξ, которую обозначим через $f(\xi)=F'(\xi)$, где

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(\xi)d\xi, \tag{2}$$

то плотность усеченного в точке κ распределения случайной величины ξ определяется по формуле

$$f_\kappa(x) = \frac{f(x)}{1 - F(\kappa)} = \frac{f(x)}{q} = cf(x), \tag{3}$$

где $c = 1/q$, q — вероятность события $\xi \geq \kappa$, т.е. вероятность превышения (обеспеченность).

Пусть $F(x)$ — функция, а $f(x)$ — плотность трехпараметрического гамма-распределения, т.е.

$$f(x) = \left[\frac{\Gamma(\gamma+b)}{\Gamma(\gamma)}\right]^{\gamma/b} \frac{1}{\Gamma(\gamma|b|x_0)} \left(\frac{x}{x_0}\right)^{\gamma/b-1} \exp\left[-\frac{x}{x_0}\frac{\Gamma(\gamma+b)}{\Gamma(\gamma)}\right]^{1/b}, \tag{4}$$

где x_0, γ и b — параметры.

Выразим параметры усеченного распределения через параметры исходного распределения.

Согласно (3) и (4), плотность $f_\kappa(x)$ усеченного в точке κ трехпараметрического гамма-распределения имеет вид

$$f_\kappa(x) = \frac{1}{1-F[\kappa]}\left[\frac{\Gamma(\gamma+b)}{\Gamma(\gamma)}\right]^{\gamma/b} \frac{1}{\Gamma(\gamma|b|x_0)} \left(\frac{x}{x_0}\right)^{\gamma/b-1} \exp\left[-\frac{x}{x_0}\frac{\Gamma(\gamma+b)}{\Gamma(\gamma)}\right]^{1/b}. \tag{5}$$

Начальный момент m_1 первого порядка равен

$$m_1 = \frac{1}{q}\int_\kappa^\infty x f_\kappa(x)\,dx.$$

Сделав замену переменной

$$z = \left[\frac{x}{x_0}\frac{\Gamma(\gamma+b)}{\Gamma(\gamma)}\right]^{1/b} \tag{6}$$

и введя обозначение $a = \dfrac{x_0\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+b)}$, получим после некоторых преобразований начальный момент k-го порядка в виде

$$m_\kappa = c\int_\kappa^\infty x^\kappa f_\kappa(x)\,dx = ca^\kappa \int_{z_1}^\infty z^{\kappa b}\frac{z^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}e^{-z}dz = ca^\kappa \frac{\Gamma(\kappa b+\gamma)}{\Gamma(\gamma)}\left[1-\Gamma(z_\kappa, \kappa b+\gamma)\right], \tag{7}$$

$$z_1 = \left[\frac{\kappa}{x_0}\frac{\Gamma(\gamma+b)}{\Gamma(\gamma)}\right]^{1/b}.$$

По формулам, связывающим начальные и центральные моменты, получим дисперсию и асимметрию усеченной величины, решив, таким образом, задачу перехода от полных выборок к усеченным и обратно.

При изучении статистических свойств указанных характеристик возникает ряд проблем, решение которых требует аналитического описания законов распределения случайных величин с нулевыми членами.

Рассмотрим, следуя Н. А. Картвелишвили (1975), распределение

$$F(x) = 1 - e^{-\alpha x}\left(a_0 + a_1 x - \ldots + a_n x^n\right), \tag{8}$$

которое хоть и не обязательно одномодально, но может быть применено в случае наличия нулевых значений. Функция (8) имеет скачок в нуле на величину $1 - a_0$. Момент неотрицательного порядка λ этого распределения есть

$$\nu_\lambda = \frac{\lambda}{m\alpha^{\kappa/m}} \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda - k}{m}\right)}{\alpha^{k/m}}. \tag{9}$$

Написав формулу (9) для n – 1 значений λ, исключая λ = 1, получаем систему уравнений, позволяющих выразить коэффициенты $a_0, \ldots, a_n$ через α. Н. А. Картвелишвили рассмотрел случай $\lambda = 1/2, 3/4, 1, 2, \quad n = 2$ и записал такую систему в виде

$$\begin{gathered}
a_0 + \frac{a_1}{\alpha} + \frac{3a_2}{4\alpha^2} = 2\sqrt{\alpha/\pi}\,\nu_{1/2}, \\
a_0 + \frac{3a_1}{2\alpha} + \frac{15a_2}{4\alpha^2} = \frac{4}{3}\sqrt{\alpha^3/\pi}\,\nu_{3/2}, \\
a_0 + \frac{2a_1}{\alpha} + \frac{6a_2}{\alpha^2} = \frac{\alpha^2}{2}\nu_2, \\
a_0 + \frac{a_1}{\alpha} + \frac{2a_2}{\alpha^2} = \alpha.
\end{gathered} \tag{10}$$

Кубическое относительно $\sqrt{\alpha}$ уравнение запишем в следующем виде:

$$\frac{\nu_2}{6}\left(\sqrt{\alpha}\right)^3 - \frac{4}{3}\frac{\nu_{3/2}}{\sqrt{\pi}}\alpha + \sqrt{\alpha} - \frac{2}{3}\frac{\nu_{1/2}}{\sqrt{\pi}} = 0. \tag{11}$$

Уравнение (11) имеет либо три, либо одно вещественное решение.

Н. А. Картвелишвили ограничивается в своих предложениях моментами не выше второго порядка, в то время как асимметрия исследуемых рядов значительна. Здесь может быть два выхода: или вводить в рассмотрение системы уравнений для моментов более высоких порядков (что возможно только до степени 2.5, так как уравнения более высокого порядка неразрешимы в радикалах), или использовать немоментные статистики.

3. Случайные процессы: достаточно ли марковости или нужны более сложные модели с памятью?

Важнейшая роль в гидрологии принадлежит задаче определения типа вероятностной модели изучаемого процесса и оценивания ее параметров. Многочисленные исследования показали, что приемлемым для многих приложений является описание закономерностей многолетних колебаний стока в виде простой цепи Маркова. В теории случайных процессов обсуждаются как методы задания марковских процессов, так и проблема упрощения исходной стохастической задачи в виде марковского приближения.

Для описания многолетних колебаний речного стока используются:

— двумерные законы распределения, получаемые как решения уравнения Маркова в виде билинейных разложений по системам ортогональных функций;
— решения стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) в форме Ито или Стратоновича;
— решения диффузионных уравнений Фоккера — Планка — Колмогорова;
— преобразование одной из известных моделей (двумерных плотностей) для перехода к существенно негауссовским маргинальным одномерным распределениям.

Марковская модель полностью задается двумерным распределением, и, соответственно, в прикладных исследованиях обсуждается следующая задача: какая из двумерных плотностей наилучшим образом отвечает эмпирическим данным. Так, например, Д. Я. Ратковичем (1976) было показано, что для неозерных рек наилучшим образом описывает вероятностные закономерности колебаний стока двумерная плотность, полученная И. О. Сармановым в результате замены переменной в двумерной плотности равномерно распределенных случайных величин, представленной в виде билинейного разложения по полиномам Лежандра.

Большая сложность при стохастическом моделировании речного стока в рамках марковского подхода возникает при учете негауссовости маргинальных (одномерных) распределений. Задача решается либо путем замены переменной в двумерном нормальном законе распределения, что близко к идее нормализации, предлагавшейся в (Картвелишвили, 1967), либо путем решения уравнения Маркова в виде разложения по системе полиномов, ортогональных с соответствующими весами, совпадающими с маргинальными распределениями.

В связи с математическими трудностями негауссовость распределений при выводе стохастических уравнений довольно часто игнорируется, а затем учитывается путем замены белого шума некоей δ-коррелированной последовательностью величин с распределением, отличным от нормального. Теоретически это не совсем корректно, поскольку в марковском случае для распределений, отличных от нормального, например пирсоновских кривых, изменяется вид коэффициентов СДУ, а не распределение белого шума, который остается гауссовским.

Рассмотрим некоторые из перечисленных проблем, в частности решение уравнения Маркова в виде билинейных разложений по системам ортогональных полиномов для трехпараметрических гамма-распределений в симметричном случае.

В работе М. В. Болгова и И. О. Сарманова (2020) предлагается метод построения двумерного закона распределения, определяющего стационарный марковский процесс в симметричном случае для трехпараметрических распределений С. Н. Крицкого и М. Ф. Менкеля. Предположим, что случайные величины ξ и η распределены в соответствии с трехпараметрическим законом С. Н. Крицкого и М. Ф. Менкеля, т. е. имеют плотности распределения p_1 и p_2, задаваемые уравнением (5), где x_0, y_0 — средние значения, $\gamma_1 > 0$, $b_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$, $b_2 > 0$ — параметры распределения. Начальные моменты α_k и β_k соответственно равны

$$\alpha_k = \int_0^\infty x^k p_1(x)dx = \frac{\Gamma(\gamma_1 + b_1 \cdot k)}{\Gamma(\gamma_1)} \left[\frac{\Gamma(\gamma_1)x_0}{\Gamma(\gamma_1 + b_1)} \right]^k, \tag{12}$$

$$\beta_k = \int_0^\infty y^k p_2(y)dy = \frac{\Gamma(\gamma_2 + b_2 \cdot k)}{\Gamma(\gamma_2)} \left[\frac{\Gamma(\gamma_2)y_0}{\Gamma(\gamma_2 + b_2)} \right]^k. \tag{13}$$

Рассмотрим симметричный случай, т. е. $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2$, $b = b_1 = b_2$, $x_0 = y_0$.

По определению (Сарманов, 1961), между неотрицательными случайными величинами ξ и η существует линейная корреляция, если эти величины имеют совместную плотность распределения

$$p(x, y) = p_1(x)p_2(y) \cdot \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} R^k P_k(x) P_k(y) \right], \tag{14}$$

при единственном ограничении — интегрируемости квадрата ядра

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \left[\frac{p(x, y)}{\sqrt{p_1(x)p_2(y)}} \right]^2 dxdy < \infty,$$

где $p(x, y)$ — неотрицательно определенная функция, $P_k(x)$ и $P_k(y)$ — ортонормированные полиномы, R — коэффициент корреляции между случайными величинами ξ и η.

Вычисление требуемых ортонормированных полиномов выполняется методом ортогонализации Грама — Шмидта с использованием их явного представления через моменты весовой функции. В данном случае весовой функцией является трехпараметрическая плотность распределения, описываемая уравнением (5) как для полиномов $P_n(x)$, так и для полиномов $P_n(y)$. Таким образом, ортонормированные полиномы $P_n(x)$ определяются следующими формулами:

$$P_n(x) = K_n \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n-1} & \alpha_n & \cdots & \alpha_{2n-1} \\ 1 & x & \cdots & x^n \end{vmatrix}, \quad K_n = \left(D_{n-1} D_n \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{15}$$

где D_n является определителем Грама:

$$D_n = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_n & \alpha_{n+1} & \alpha_{n+2} & \cdots & \alpha_{2n} \end{vmatrix}, \quad D_{n-1} = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-1} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n-1} & \alpha_n & \alpha_{n+1} & \cdots & \alpha_{2(n-1)} \end{vmatrix},$$

или в более удобном для вычислений виде:

$$P_n(x) = K_n\left(A_{n+1,n+1}x^n + A_{n+1,n}x^{n-1} + \cdots + A_{n+1,1}\right), \tag{16}$$

где $A_{i,j}$ — соответствующие алгебраические дополнения элементов последней строки определителя в (15). В силу симметричности рассматриваемого случая полиномы $P_n(y)$ определяются аналогично.

Покажем, что корреляция случайных величин ξ и η, задаваемая формулой (14), линейная, для чего вычислим первый момент условного распределения (условное математическое ожидание) величины η при фиксированном значении $\xi = x$:

$$\overline{y}(x) = M(\eta | x) = \int_0^\infty yp(x,y) / p_1(x)dy. \tag{17}$$

В силу ортогональности многочленов $P_k(y)$ формула (17) перепишется следующим образом:

$$\overline{y}(x) = y_0 + R\frac{(x-\alpha_1)}{\sigma_x}\sigma_y, \tag{18}$$

где σ_x^2 и σ_y^2 — дисперсии случайных величин ξ и η соответственно.

Из (18) следует, что функция регрессии $\overline{y}(x)$ является линейной функцией x.

Условный момент k-го порядка m_{0k} определяется формулой

$$m_{0k} = \int_0^\infty y^k p(x,y) / p_1(x)\, dy. \tag{19}$$

Представим y^k в виде разложения по ортонормированной системе полиномов $P_k(y)$:

$$y^k = C_{1,k}P_1(y) + C_{2,k}P_2(y) + \cdots + C_{k,k}P_k(y). \tag{20}$$

Для определения коэффициентов разложения $C_{i,k}$ умножим обе части (20) на $p_2(y)P_i(y)$ и проинтегрируем полученное выражение на интервале $[0,\infty]$. Тогда с учетом построенной ортогональной системы полиномов $P_k(y)$ (15) формула для определения коэффициентов $C_{i,k}$ будет иметь вид

$$C_{i,k} = K_i \sum_{j=1}^{i+1} A_{i+1,j}\beta_{k+j-1}. \tag{21}$$

Соотношения (20), (21) позволяют преобразовать выражение (19) для моментов условного распределения k-го порядка к виду

$$m_{ok}(x) = \beta_k + \sum_{i=1}^{k} C_{i,k} P_i(x) R^i, \tag{22}$$

коэффициенты $C_{i,k}$ определяются по формуле (21).

Таким образом, на основе системы ортогональных функций с весовой функцией в виде трехпараметрического гамма-распределения получена симметричная плотность, которая удовлетворяет уравнению Маркова и характеризуется линейным уравнением регрессии (18), представленным на рис. 1.

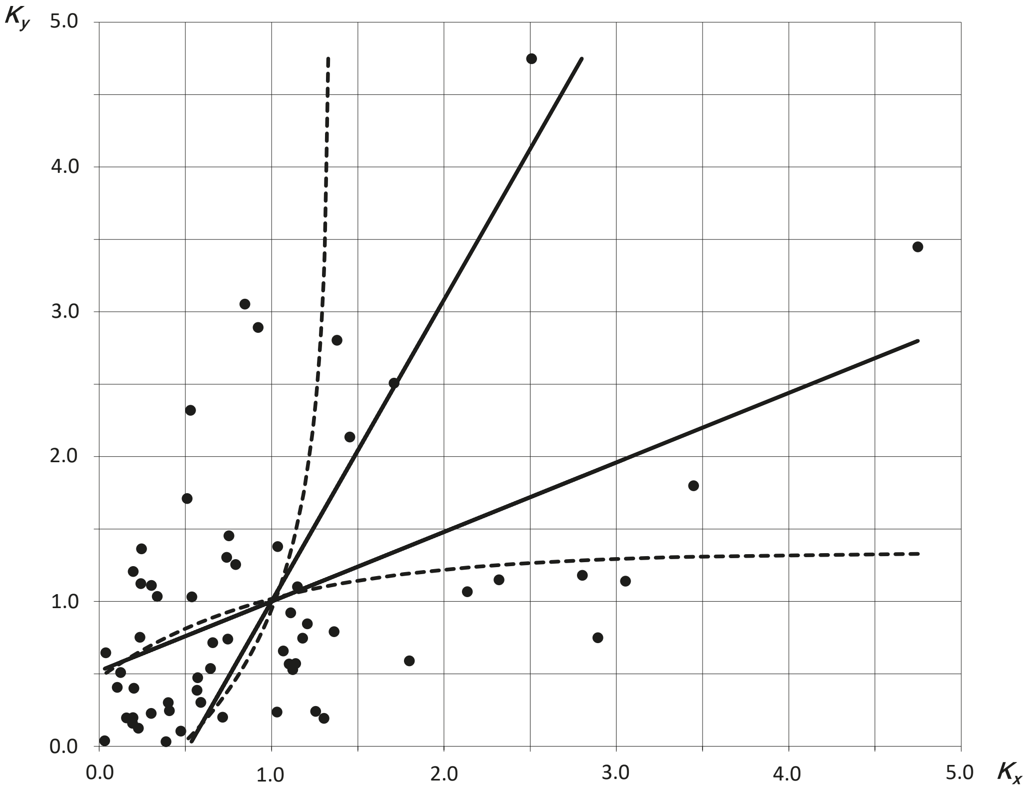

Рис. 1. Линии регрессии для корреляции смежных значений притока к озеру Чаны, рассчитанные на основе линейной модели (14) (сплошные линии) и нелинейной модели Ратковича — Сарманова (пунктир); точки — наблюденные значения стока

Рассмотрим далее применительно к задаче стохастического моделирования речного стока класс т. н. диффузионных марковских процессов, позволяющих получать решения вероятностных задач при разнообразных граничных условиях. Широко известны дифференциальные уравнения в частных производных, которым удовлетворяет плотность вероятности перехода $f(s, x; t, y)$, являющаяся также решением уравнения Маркова. Рассматривая три момента времени из промежутка

$s_1 < s + \Delta s < t$, представим три первых условных момента приращения случайного процесса за время Δs:

$$a(s,x,\Delta s) = \int_{-\infty}^{\infty} (z-x) f(s,x;s+\Delta s,z)dz, \tag{23}$$

$$b(s,x,\Delta s) = \int_{-\infty}^{\infty} (z-x)^2 f(s,x;s+\Delta s,z)dz, \tag{24}$$

$$c(s,x,\Delta s) = \int_{-\infty}^{\infty} (z-x)^3 f(s,x;s+\Delta s,z)dz. \tag{25}$$

Предположим, что

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{a(s,x,\Delta s)}{\Delta s} = a(s,x), \tag{26}$$

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{b(s,x,\Delta s)}{\Delta s} = b(s,x), \tag{27}$$

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{c(s,x,\Delta s)}{\Delta s} = 0 \tag{28}$$

и для f выполнены условия гладкости (Коваленко и Сарманов, 1978). Плотность вероятности перехода f, удовлетворяющая уравнению Маркова, так же удовлетворяет т. н. обратному уравнению Фоккера — Планка — Колмогорова, имеющему вид

$$\frac{\partial f}{\partial s} = -a(s,x)\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{b(s,x)}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \tag{29}$$

где $a(s,x)$ называется коэффициентом сноса, а $b(s,x)$ — коэффициентом диффузии.

Двумерный закон распределения, являющийся решением уравнения (29), образует т. н. диффузионный марковский процесс.

Располагая двумерной плотностью, порождающей стационарный марковский процесс с двухпараметрическим одномерным гамма-распределением, получим соответствующие коэффициенты уравнения ФПК и затем СДУ в форме Ито и Стратоновича.

Итак, для одномерного закона распределения

$$p(x) = \frac{\gamma^\gamma}{\tilde{A}(\gamma)} x^{\gamma-1} e^{-\gamma x} \tag{30}$$

располагаем двумерной плотностью (8).

Для двумерной плотности с маргинальным распределением (30) в дальнейшем будут использоваться выражения для условного среднего и условной дисперсии из (Блохинов и Сарманов, 1968).

Вычислим коэффициент сноса и диффузии в уравнении ФПК:

$$a(x,\tau)=\int_0^\infty (y-x)p(y/x)dy=1+R(x-1)-x=1+e^{-\mu\tau}(x-1)-x, \tag{31}$$

$$b(x,\tau)=\int_0^\infty (y-x)^2 p(y/x)dy=\sigma^2\left[(1-R)+2R(1-R)x\right]+\left[(x-1)(R-1)\right]^2=$$

$$=\sigma^2\left[(1-e^{-\mu\tau})+2e^{-\mu\tau}(1-e^{-\mu\tau})x\right]+\left[(x-1)(e^{-\mu\tau}-1)\right]^2. \tag{32}$$

Коэффициенты сноса и диффузии уравнения ФПК вычисляются как пределы выражений (31) и (32) при $\tau\to 0$:

$$a(x)=-\mu(x-1), \tag{33}$$

$$b(x)=\frac{2\mu x}{\gamma}. \tag{34}$$

Здесь $\gamma = 1/Cv^2$ — параметр одномерного распределения, μ — показатель экспоненты корреляционной функции.

Получим стационарное решение уравнения (29), для чего подставим (27) и (28) в следующее выражение:

$$p(x)=\frac{c}{b(x)}\exp\left[2\int_0^x \frac{a(x)}{b(x)}dx\right], \tag{35}$$

где c — нормирующая константа. Непосредственные вычисления по формуле (35) показывают, что (33) и (34) при соответствующем выборе нормирующей константы с приводят к двухпараметрическому гамма-распределению (30).

Некоторые результаты последних лет в области описания закономерностей многолетних колебаний стока были получены на основе методов, использующих решение стохастических дифференциальных уравнений. В работах В. В. Коваленко, В. И. Найденова и ряде других (Коваленко, 1993; Найденов, 2004) характеристики колебаний стока получаются путем решения описанного выше диффузионного уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова. Рассматриваемые модели, как отмечено выше, позволяют получать вероятностные решения при разнообразных граничных условиях.

В качестве одной из популярных идей в гидрологической литературе, посвященной многолетним колебаниям стока, обсуждалась гипотеза самоподобной структуры временно́го ряда. Эмпирически было показано, что в последовательностях гидрометеорологических характеристик оцениваемый по выборке показатель Херста H существенно больше 0.5 (Херст, 1954). Это означает, что структура временно́го ряда отличается от белого шума, для которого характерно значение $H = 0.5$. Но, например, анализ рядов притока к оз. Байкал и летних температур в его бассейне с помощью показателя Херста выявил неоднозначную картину. Для ряда температур, где очевидно присутствует положительный тренд, показатель Херста составляет $H = 0.82$, а для ряда годовых притоков к оз. Байкал параметр Херста равен 0.5, что, конечно, может указывать и на простейшую структуру временно́го ряда, но в структуре ряда притока выделяется группировка маловодных лет, весьма маловероятная для последовательности независимых случайных величин.

Из сказанного следует вывод, что можно усложнить марковскую модель, введя в нее более сложные механизмы временно́й изменчивости, в частности предусмотреть разное поведение процесса на различных диапазонах значений. Технически это можно сделать в форме представления марковского процесса в виде уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова, допускающего бистабильность состояния моделируемой системы. В работах В. И. Найденова (2004) была сделана попытка обобщить уравнение (29) на случай нескольких устойчивых состояний, но дальнейшего развития эти результаты пока не получили. Многочисленные попытки дать гидролого-географическую интерпретацию результатам решения уравнения ФПК были предприняты в упомянутых работах В. В. Коваленко и его учеников (Коваленко и др., 2006), но пока эти идеи остаются на стадии научных гипотез.

4. Более сложные модели многолетних колебаний стока на примере замкнутых водоемов

В гидрологии большой интерес представляет задача описания и вероятностного прогнозирования уровня Каспийского моря. Вероятностный прогноз уровня Каспийского моря может быть получен путем решения стохастического дифференциального уравнения водного баланса как в аналитическом виде (работы С. Н. Крицкого (Крицкий и др., 1975), В. Н. Привальского и С. В. Музылева (Музылев и др., 1982)), так и методом имитационного моделирования (Болгов, 2005; Болгов и др., 2007).

Имитационная модель предполагает получение искусственных временны́х последовательностей среднегодовых значений притока и видимого испарения (испарение минус осадки) большой продолжительности. Для стохастического моделирования рядов притока и испарения используется двумерная плотность, получаемая путем замены переменной в линейной корреляции равномерно распределенных случайных величин. Поскольку значимая корреляция между притоком и видимым испарением с поверхности Каспийского моря отсутствует, то эти процессы моделируются как независимые марковские последовательности.

Имея искусственные ряды притока и испарения, последовательно и многократно решим уравнения водного баланса на год вперед с учетом площади водной поверхности на начало расчетного интервала времени и оттока в залив Кара-Богаз-Гол по известной функциональной зависимости. Полученные таким образом продолжительные ряды уровней воды в море статистически обрабатываются, и определяются расчетные (или прогнозные) характеристики.

Расчеты с использованием стационарной марковской модели притока и испарения показывают, что дисперсия колебаний уровня моря получается несколько заниженной. Как один из вариантов, может быть рассмотрена более сложная модель для описания многолетних колебаний речного стока, а именно полумарковская. В таком случае математическое ожидание процесса меняется скачкообразно при переходе от одного условно-однородного периода к другому. Во временно́м ряду притока к Каспийскому морю можно выделить три однородных периода с продол-

Таблица 1. **Статистические характеристики модельного ряда уровней Каспия при полумарковской модели изменчивости притока**

№	Параметр распределения	Значения параметров распределения уровня моря при среднеквадратическом отклонении параметра «среднее», равном:			
		0.1	**4**	**10**	**15**
1	Средний уровень, м	–28.25	–28.25	–28.24	–28.23
2	Асимметрия (Cs)	0.16	0.18	0.19	0.17
3	Среднеквадратическое отклонение, м	0.63	0.66	0.79	0.95
4	Эксцесс	3.2	3.3	3.5	3.7
5	Коэффициент автокорреляции	0.97	0.97	0.98	0.99

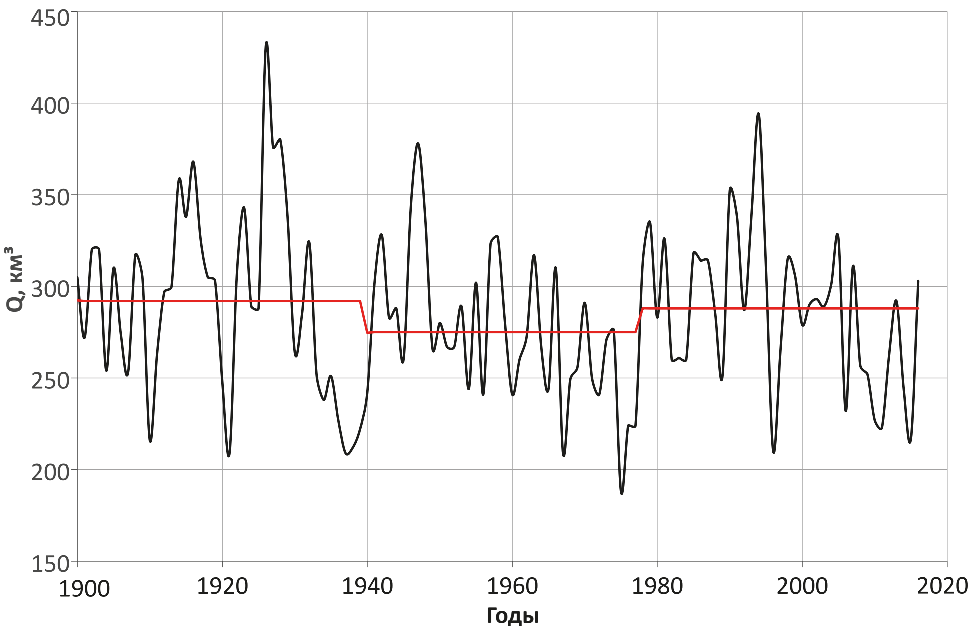

Рис. 2. Кусочно-однородный режим изменения среднего значения притока к Каспию

жительностью 40 лет (табл. 1 и рис. 2) и в границах каждого периода рассматривать процесс как стационарный. Смену состояний процесса предполагается описать в рамках марковской модели, но в данном случае у нас только три состояния и переход от одного к другому условно однородному периоду производится случайным образом. Параметр «среднее» при такой схеме задается с помощью нормального распределения с различной дисперсией, а коэффициенты вариации, асимметрии и автокорреляции сохраняются для всех периодов.

Результаты вероятностных расчетов характеристик уровня Каспийского моря при полумарковской схеме моделирования притока приведены в табл. 1. Результаты расчетов показывают, что при увеличении дисперсии оценки «среднее» среднеквадратическое отклонение колебаний уровня моря увеличивается и приближается к значению, полученному для наблюденного ряда уровней. Рассмотренный пример показывает, что уровенный режим моря весьма чувствителен к возможным нелинейным изменениям параметров. Данная схема носит больше теоретический характер, поскольку обоснование предлагаемой полумарковской модели многолетних колебаний стока потребует дополнительных исследований.

Обращает на себя внимание заметное расхождение между рассчитанным по модели средним уровнем моря и средним уровнем по данным наблюдений. Такие расхождения объясняются большой выборочной дисперсией параметров предлагаемой стохастической модели колебаний уровня Каспийского моря. Имитационные эксперименты, выполненные в работе (Раткович и Болгов, 1994), показали, что даже при наличии более 100 лет наблюдений погрешность уровня тяготения составляет около метра. Как показал Н. А. Багров (1963), объем независимой информации при длине ряда 100 лет и коэффициенте автокорреляции 0.98 составляет около трех-четырех лет.

5. Нестационарность, обусловленная климатическими изменениями: есть ли прогресс в понимании подходов к вероятностным прогнозам?

Данные гидрологического мониторинга свидетельствуют о том, что во многих случаях на территории России имеют место существенные изменения стока, в основном во внутригодовом разрезе. В нестационарном случае возникает ряд задач, требующих для своего решения новых методов. Для начала необходимо выяснить «характер» нестационарности. Если процесс (выборка) характеризуется увеличением размаха колебаний, можно предложить мультипликативную модель. Если плавно изменяется среднее, можно рассмотреть модель с линейным или нелинейным трендом. Во всех случаях возникает вопрос, на который сегодня сложно получить однозначный ответ: отражает ли выделенный тренд однонаправленные изменения в развитии процесса, или это фрагмент некоторого низкочастотного колебания в гидролого-климатической системе, которое через некоторое время проявится в виде обратной тенденции.

Надо иметь в виду, что имеющиеся гидрологические ряды весьма коротки для построения сложных вероятностных моделей только статистическими методами. Построить матрицу вероятностей перехода из одного устойчивого состояния, длящегося несколько десятков лет, в другое, наблюдавшееся также в течение десятилетий, чисто статистическими методами невозможно, поскольку сегодня мы имеем дело только с одним случаем смены состояния. Таких случаев должно быть несколько десятков, и только тогда можно говорить и о распределении вероятностей времени пребывания системы в одном из состояний, и об оценке матрицы переходных вероятностей.

Обратимся к проблеме учета нескольких условно стационарных состояний при вероятностном прогнозировании стока. В нашем (гидрологическом) случае имеется только два состояния процесса, и мы можем лишь предположить, что с вероятностями n_1/N и n_2/N система может находиться в одном из них. Здесь $n_1 + n_2 = N$, где N — общая продолжительность неоднородной выборки.

На будущее мы можем утверждать, что с соответствующими вероятностями система может находиться в одном из двух состояний, и можно предположить, что математическое ожидание прогнозируемого процесса является смесью двух распределений:

$$\tilde{p}(\theta / x) = \frac{n_1}{N} \cdot \eta(\theta, n_1) + \frac{n_2}{N} p(\theta / x), \qquad (36)$$

где $\eta(\theta, n_1)$ — выборочное распределение среднего (математического ожидания) для первого условно-стационарного участка длиной n_1, а $p(\theta / x)$ — апостериорная плотность байесовской оценки θ для новых климатических условий. Нетрудно заметить, что плотность (36) является двухмодальной.

Собственно байесовское прогнозирование состоит в вычислении прогнозной плотности по формуле полной вероятности. В этом случае смесь распределений (36) будет выступать в качестве апостериорного распределения, а модельным распределением будет двухпараметрическое гамма-распределение с параметром γ, равным среднему значению для обеих выборок:

$$\pi(y) = \int_{\theta} P(y, \gamma, \theta) \cdot \tilde{p}(\theta / x) d\theta. \qquad (37)$$

Полученная прогнозная плотность распределения $\pi(y)$ уже не будет являться гамма-распределением и вычисляется путем численного интегрирования уравнения (37).

Для иллюстрации на рис. 3 приведен пример расчета по уравнению (37) для нестационарного ряда минимальных в году расходов воды р. Дон у г. Лиски.

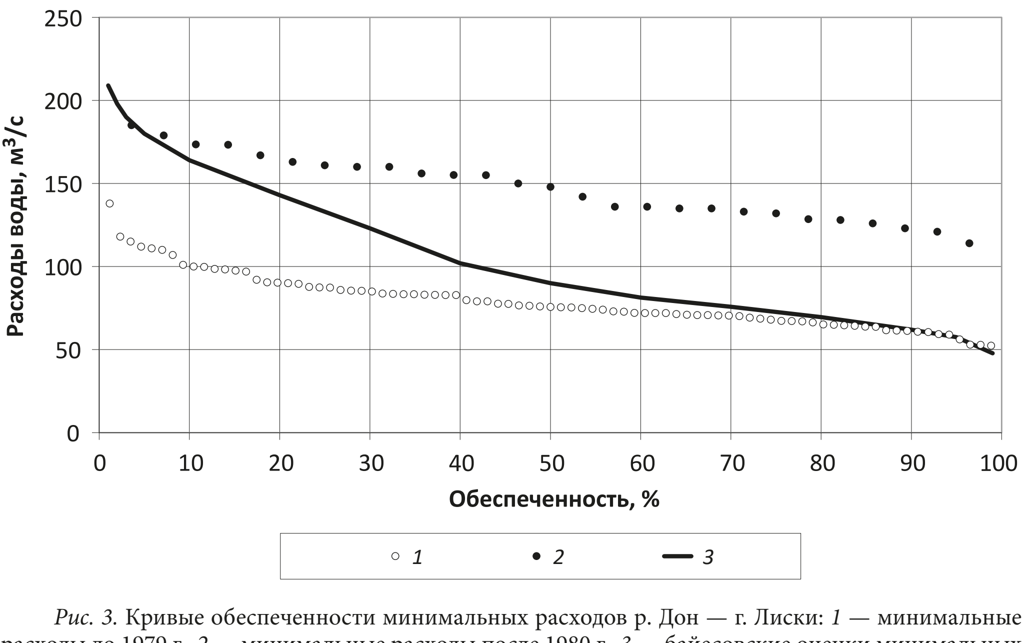

Рис. 3. Кривые обеспеченности минимальных расходов р. Дон — г. Лиски: *1* — минимальные расходы до 1979 г., *2* — минимальные расходы после 1980 г., *3* — байесовские оценки минимальных расходов воды

В будущем, если система перейдет в третье состояние, отличающееся от двух предыдущих, процедуру можно повторить еще раз, записав уравнение (36) для трех компонент.

Понятно, что прогнозная плотность (37), представленная на рис. 3, не является полным заданием случайного процесса, поскольку представляет собой лишь одномерный закон распределения и может быть использована только для назначения расчетных значений параметров (квантилей) с учетом возможного нестационарного поведения процесса.

6. О неопределенности климатических изменений

Современное потепление глобального климата имеет как естественно-инерционную, так и антропогенно обусловленную составляющие. Утверждать сегодня, что антропогенная составляющая потепления повсеместно преобладает, оснований нет, поскольку точность моделей глобальной циркуляции атмосферы недостаточна, а неопределенность долгосрочных прогнозов изменений климата весьма велика. В моделях глобальной циркуляции недостаточно проработаны целые блоки, например гидрологический цикл реализован весьма упрощенно. Имеет право на существование вывод о том, что глобальные модели, верифицированные на данных, характеризующих современные климатические условия, лишь косвенно отражают эффект дополнительной эмиссии CO_2.

Использование в качестве сценариев будущих изменений климата результатов расчетов по верифицированным моделям глобальной циркуляции с увеличенным (сценарным) содержанием CO_2 в атмосфере представляется возможным. Однако при этом вероятности этих сценариев вряд ли могут быть надежно определены по частотам встречаемости таких концентраций CO_2 в прошлом, вычисленным, например, по палеореконструкциям климата. Необходимо также отметить, что региональные климатические характеристики на моделях общей циркуляции воспроизводятся значительно хуже, чем глобальные параметры. Можно ли модельные выводы о глобальном изменении климата переносить на региональный уровень — это вопрос, который требует учета множества факторов неопределенности модельных представлений.

С точки зрения приложений возникает важнейший вопрос — как учесть неопределенность долгосрочного прогноза при выработке практических рекомендаций. Решение практических задач, связанных с использованием водных ресурсов, требует вероятностного прогноза их состояния. Необходимо каким-то образом оценить шансы реализации в будущем всех рассматриваемых сценариев и разрабатывать для приложений прогноз на основе использования сведений о шансах всех «разумных» сценариев. В таком случае представляется возможным дать прогноз будущего состояния водных ресурсов в вероятностной форме и избежать очень грубых просчетов.

Принятые научным сообществом сценарии изменения климата, вероятно, не охватывают всех возможных «исходов» ввиду ограниченности наших знаний. Используемые модельные представления (метеорологические, океанологические, гидрологические, биологические и пр.) несовершенны, но мы не можем предсказать, каковы будут эффекты при дальнейшем их развитии. Представляющий практическую ценность научный прогноз сложных, слабо изученных явлений должен основываться на учете многообразия существующих современных представлений и многовариантности прогнозов глобального развития. Получить такие прогнозные оценки можно, например, на основе байесовского подхода с учетом шансов реализации того или иного сценария. Основная сложность — оценка шансов или вероятностей реализации этих сценариев. Речь идет о попытках распределить шансы между прогнозами, характеризующимися большой неопределенностью. Если сценарии, принятые научным сообществом, не имеют явных предпочтений друг перед другом, то в первом приближении можно принять, что их шансы на реализацию в будущем равны.

На примере бассейна горной реки (Амударьи) рассмотрена задача оценки водности рек в условиях значительной неопределенности прогнозов изменений климата и состояния водосбора. Последнее для данного бассейна весьма важно, так как значительная часть стока формируется путем таяния ледников, современное же оледенение в регионе характеризуется существенной скоростью его деградации.

Подход, позволяющий учесть метеорологические факторы и их изменение в различных сценариях климата, основан на идеологии динамико-стохастического моделирования и в целом позволяет решать разнообразные задачи. Идея метода состоит в моделировании искусственных последовательностей (реализаций) т. н. побуждающих процессов. В нашем случае побуждающими процессами являются осадки и температура воздуха.

Располагая последовательностями осадков и температур, а также сведениями о состоянии оледенения (современные и прогнозные оценки), с использованием моделей формирования стока осуществляем расчет водности реки и получаем гидрологический ряд необходимой длины. Подход позволяет учесть возможные климатические изменения и прогнозные оценки оледенения путем корректировки параметров гидрологической модели (Агальцева и др., 2011).

Таблица 2. **Функция распределения годового стока для р. Амударьи — п. Керки**

№	Время	Веса, % для сценариев			Вероятность превышения, %				
		Современный климат	Сценарий A1	Сценарий B1	50	75	90	95	97
1	30 лет	50	25	25	1860	1730	1610	1550	1500
2	50 лет	50	25	25	1800	1644	1516	1440	1400

В изучаемом регионе используется шесть сценариев будущих климатических изменений как наиболее реалистичные. Два из этих сценариев приводят к наихудшим гидрологическим результатам по сравнению с современным климатом, соответственно каждому из них придан вес 1/6. Остальные сценарии приводят к значениям водности, не сильно отличающимся от характерных для современного климата, поэтому параметрам распределения стока, рассчитанным за репрезентативный период, придан вес 4/6. В табл. 2 приведены результаты расчетов стока по формуле (37) для р. Амударьи — п. Керки.

7. Заключение

В российской гидрологии за продолжительный период развития были предложены разнообразные методы статистического анализа и вероятностного моделирования гидрологических процессов. Эти методы трудами классиков гидрологии образовали научный предмет, в рамках которого были решены в том числе и многочисленные инженерные задачи. В современной отечественной гидрологии развиваются новые вероятностные модели, уточняющие существующие выводы и результаты, предлагаются подходы, позволяющие решать новые задачи, связанные в основном с изменением условий формирования гидрологических явлений и процессов по разным причинам.

Предлагаемый вниманию читателя обзор результатов российской стохастической гидрологии не претендует, конечно, на исчерпывающую полноту. Существует много интересных результатов, не упомянутых в данном исследовании, но главный вывод состоит в том, что несмотря на ограниченность исходных данных и происходящие изменения природной и социальной сред, несмотря на значительный прогресс в задачах «глобального» моделирования, не отменяются и вряд ли будут отменены в будущем необходимость развития в гидрометеорологии вероятностных идей и подходов. Только на основе вероятностных подходов возможно дать прогнозное распределение стока, учитывающее основные источники неопределенности в современных задачах гидрологии.

Литература

Агальцева, Н. А., Болгов, М. В., Спекторман, Т. Ю., Трубецкова, М. Д., Чуб, В. Е. (2011). Оценка гидрологических характеристик в бассейне Амударьи в условиях изменения климата. *Метеорология и гидрология*, 10, 58–69.

Багров, Н. А. (1963). О колебаниях уровня бессточных озер. *Метеорология и гидрология*, 6, 41–46.

Блохинов, Е. Г. (1974). *Распределения вероятностей величин речного стока*. Москва: Наука.

Блохинов, Е. Г., Сарманов, О. В. (1968). Гамма-корреляция и ее использование при расчетах многолетнего регулирования речного стока. *Труды ГГИ*, (14), 52–75.

Болгов, М. В., Сарманов, И. О. (1988). Усеченное трехпараметрическое гамма-распределение С. Н. Крицкого и М. Ф. Менкеля и некоторые его приложения к гидрологическим расчета. *Водные ресурсы*, (2), 24–29.

Болгов, М. В. (2005). Марковские процессы в задаче прогнозирования уровня замкнутого водоема. *Метеорология и гидрология*, (11), 74–85.

Болгов, М. В., Красножон, Г. Ф., Любушин, А. А. (2007). *Каспийское море. Экстремальные гидрологические события*. Москва: Наука.

Болгов, М. В., Писаренко, В. Ф. (1999). О распределении максимальных расходов воды рек Приморья. *Водные ресурсы*, 26 (6), 710–721.

Болгов, М. В., Сарманов, И. О. (2020). Двухмерный закон распределения случайных величин, имеющих трехпараметрические гамма-распределения С. Н. Крицкого и М. Ф. Менкеля (симметричный случай). *Водные ресурсы*, 47 (4), 1–5.

Картвелишвили, Н. А. (1967). *Теория вероятностных процессов в гидрологии и регулировании речного стока*. Ленинград: Гидрометеоиздат.

Картвелишвили, Н. А. (1975). *Стохастическая гидрология*. Ленинград: Гидрометеоиздат.

Коваленко, В. В. (1993). *Моделирование гидрологических процессов*. Ленинград: Гидрометеоиздат.

Коваленко, В. В., Викторова, Н. В., Гайдукова, Е. В. (2006). *Моделирование гидрологических процессов*. Санкт-Петербург: РГГМУ.

Коваленко, И. Н., Сарманов, О. В. (1978). *Краткий курс теории случайных процессов*. Киев: Вища школа.

Крицкий, С.Н., Коренистов, Д.В., Раткович, Д.Я. (1975). *Колебания уровня Каспийского моря*. Москва: Наука.

Крицкий, С.Н., Менкель, М.Ф. (1946). О приемах исследования случайных колебаний речного стока. *Труды ГГИ*, (29), 3–32.

Музылев, С.В., Привальский, В.Н., Раткович, Д.Я. (1982). *Стохастические модели в инженерной гидрологии*. Москва: Наука.

Найденов, В.И. (2004). *Нелинейная динамика поверхностных вод суши*. Москва: Наука.

Писаренко, В.Ф., Родкин, М.В. (2007). Распределение с тяжелыми хвостами: приложения к анализу катастроф. В: *Вычислительная сейсмология. Т. 38*. Москва: ГЕОС, 2–236.

Раткович, Д.Я. (1976). *Многолетние колебания речного стока*. Ленинград: Гидрометеоиздат.

Раткович, Д.Я., Болгов, М.В. (1994). Исследование вероятностных закономерностей многолетних колебаний уровня Каспийского моря. *Водные ресурсы*, 21 (4), 389–404.

Рождественский, А.В., Чеботарев, А.И. (1974). *Статистические методы в гидрологии*. Ленинград: Гидрометеоиздат.

Сарманов, О.В. (1961). Исследование стационарных марковских процессов методом разложения по собственным функциям. *Тр. МИАН СССР*, 60, 239–261.

СНиП 2.01.14-83 «Определение расчетных гидрологических характеристик». (1985). Госстрой СССР. Москва: Стройиздат.

СП 33-101-2003 «Определение основных расчетных гидрологических характеристик». (2004). Госстрой России. Москва: ФГУП ЦПП.

*Федеральный закон «О техническом регулировании» от 27.12.2002 N 184-ФЗ. (2*002). Москва.

Федеральный закон «Технический регламент о безопасности зданий и сооружений» от 30.12.2009 N 384-ФЗ (2009). Москва.

Херст, Г. (1954). *Нил. Общее описание реки и использования ее вод.* Москва: Издательство иностранной литературы.

Embrechts, P. Kappelberg, C. and Mikosch, T. (1997). *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance.* Springer.

Hazen, A. (1913). Storage to be Provide Impounding Reservoirs for Municipal Water Supply. *Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, 39 (9), 1943–2044.

Klemes, V. (1978). Physically Based Stochastic Hydrologic Analysis. *Advances in Hydroscience*, 11, 285–356.

Sudler, C.E. (1927). Storage required for the regulation of streamflow. *Trans. Amer. Soc. Civil Engrs*., 91, 620–660.

Статья поступила в редакцию 20 апреля 2020 г.
Статья рекомендована к печати 14 декабря 2020 г.

Контактная информация:

Болгов Михаил Васильевич — bolgovmv@mail.ru

Stochastic hydrology: the development of the main ideas in Russia*

M. V. Bolgov

Institute of Water Problems of the Russian Academy of Sciences,
3, ul. Gubkina, Moscow, 119333, Russian Federation

For citation: Bolgov, M. V. (2020). Stochastic hydrology: the development of the main ideas in Russia. *Vestnik of Saint Petersburg University. Earth Sciences*, 66 (1), 19–40.
https://doi.org/10.21638/spbu07.2021.102 (In Russian)

The aim of the work is to assess the current state of scientific research and the main results in the field of stochastic hydrology. Various problems of scientific and applied hydrology are

* The work was carried out with partial funding from the state budget within the framework of theme No. 0147-2019-0003 of the state assignment of the Institute of Water Problems of the Russian Academy of Sciences (state registration No. AAAA-A18-118022090105-5).

solved on the basis of different types of stochastic models. On the basis of these models, methods are being developed for obtaining secure engineering runoff characteristics, or reliable hydrological forecasts of various lead times. Most water management, construction, environmental and other problems are solved today within the framework of probabilistic models and statistical methods. The main tasks of stochastic hydrology can be divided into several groups. Despite the discussion in hydrology on the applicability of the theory of probability and random processes to the analysis of fluctuations of hydrometeorological series, the problem of choosing a research methodology remains one of the most important, and is often discussed in connection with anomalous manifestations of hydrological phenomena (extreme floods, prolonged droughts). An important applied and theoretical problem in hydrology is the choice of a one-dimensional probability distribution. In this part, discussions are important both on the problem of the type of new distributions and on methods for estimating parameters. Ideas and hypotheses are considered that can significantly increase the reliability of statistical characteristics. Climatic changes in many cases cause disturbances in the stationarity of time series of hydrological characteristics. Progress in the development of new approaches to probabilistic modeling is associated both with the well-known problem of the sufficiency of the Markov hypothesis and with the need to introduce new, more complex models and Bayesian estimation methods. The article is devoted to the discussion of the current state of these problems in the form of a scientific review.

Keywords: stochastic hydrology, probability distributions, stochastic processes, correlation theory, long-term fluctuations, nonstationary processes, Bayesian methods.

References

Agaltseva, N. A., Spektorman, T. Yu., Chub, V. E., Bolgov, M. V. and Trubetskova, M. D. (2011). Estimating hydrological characteristics in the Amudarya River basin under climate change conditions. *Russian Meteorology and Hydrology*, 10, 58–69. (In Russian)

Bagrov, N. A. (1963). On fluctuations of the level of drainless lakes. *Russian Meteorology and Hydrology*, 6, 41–46. (In Russian)

Blokhinov, E. G. (1974). *The probability distribution of the river flow rate*. Moscow: Nauka Publ. (In Russian)

Blokhinov, E. G. and Sarmanov, O. V. (1968). Gamma correlation and its use in calculations of long-term river flow regulation. *Trudy GGI*, 14, 52–75. (In Russian)

Bolgov, M. V. (2005). Markov processes in the problem of prediction of the level of a closed basin. *Russian Meteorology and Hydrology*, (11), 74–85. (In Russian)

Bolgov, M. V., Krasnozhon, G. F. and Lyubushin, A. A. (2007). *Caspian Sea: Extreme Hydrological Events.* Moscow: Nauka Publ. (In Russian)

Bolgov, M. V. and Pisarenko, V. F. (1999). The distribution of peak runoff values in Marittime territory Rivers. *Water Resources*, 26 (6), 710–721. (In Russian)

Bolgov, M. V. and Sarmanov, I. O. (1988). Truncated three-parameter gamma distribution of S. N. Kritskii and M. F. Menkel and some of its applications to hydrological calculations. *Water Resources*, (2), 24–29. (In Russian)

Bolgov, M. V. and Sarmanov, I. O. (2020). Two-dimensional distribution law of random variables having S. N. Kritskii and M. F. Menkel three-parameter gamma distributions: a symmetrical case. *Water Resourses*, 47 (4), 363–367. (In Russian)

Embrechts, P. Kappelberg, C. and Mikosch, T. (1997). *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance.* Springer.

Federal law “On Technical Regulation”, No. 184-FZ, 27 Dec. 2002. (2002). Moscow. (In Russian)

Federal law “Technical Regulations on safety of buildings”, No. 384-FZ, 30 Dec. 2009. (2009). Moscow. (In Russian)

Hazen, A. (1913). Storage to be Provide Impounding Reservoirs for Municipal Water Supply. *Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, 39 (9), 1943–2044.

Hurst, H. E. (1954). *The Nile: A General Account of the River and the Utilization of Its Waters.* Moscow: Foreign Languages Publishing House. (In Russian)

Kartvelishvili, N. A. (1967). *Theory of probabilistic processes in hydrology and river flow regulation*. Leningrad: Gidrometeoizdat Publ. (In Russian)

Kartvelishvili, N. A. (1975). *Stochastic hydrology.* Leningrad: Gidrometeoizdat Publ. (In Russian)

Klemes, V. (1978). Physically Based Stochastic Hydrologic Analysis. *Advances in Hydroscience*, 11, 285–356.

Kovalenko, I. N. and Sarmanov, O. V. (1978). *A Brief Course in the Theory of Random Processes*. Kiev: Vyshcha Shkola Publ. (In Russian)

Kovalenko, V. V. (1993). *Modeling of hydrological processes*. Leningrad: Gidrometeoizdat Publ. (In Russian)

Kovalenko, V. V., Viktorova, N. V. and Gaidukova, E. V. (2006) *Modeling of Hydrological Processes*. St. Petersburg: RGGMU Publ. (In Russian)

Kritskii, S. N. and Menkel, M. F. (1946). Methods for studying random fluctuations in river flow. *Trudy GGI*, (29), 3–32. (In Russian)

Kritskii, S. N., Korenistov, D. V. and Ratkovich, D. Ya. (1975). *The Caspian Sea level fluctuations*. Moscow: Nauka Publ. (In Russian)

Muzylev, S. V., Privalsky, V. E. and Ratkovich, D. Ya. (1982). *Stochastic models in engineering hydrology*. Moscow: Nauka Publ. (In Russian)

Naydenov, V. I. (2004). *Nonlinear dynamics of land surface waters*. Moscow: Nauka Publ. (In Russian)

Pisarenko, V. F. and Rodkin, M. V. (2007). Distributions with Large Tails: Application to Catastrophe Analysis. In: *Vychislitel'naia seismologiia. T. 38.* Moscow: GEOS Publ., 2–236. (In Russian)

Ratkovich, D. Ya. (1976). *Long-term fluctuations in river flow*. Leningrad: Gidrometeoizdat Publ. (In Russian)

Ratkovich, D. Ya. and Bolgov, M. V. (1994). Study of probabilistic patterns of long-term fluctuations in the Caspian Sea level. *Water Resourses*, 21 (4), 389–404. (In Russian)

Rozhdestvensky, A. V. and Chebotarev, A. I. (1974). *Statistical methods in hydrology.* Leningrad: Gidrometeoizdat Publ. (In Russian)

Sarmanov, O. V. (1961). Investigation of stationary Markov processes by the method of eigenfunction expansion. *Trudy Mat. Inst. Steklov*, 60, 239–261. (In Russian)

SNiP 2.01.14-83 "Determination of the calculated hydrological characteristics". (1985). Gosstroi SSSR. Moscow: Stroiizdat Publ. (In Russian)

SP 33-101-2003 "Determination of the main calculated hydrological characteristics". (2004). Gosstroi Rossii. Moscow: FGUP CPP Publ. (In Russian)

Sudler, C. E. (1927). Storage required for the regulation of streamflow. *Trans. Amer. Soc. Civil Engrs*., 91, 620–660.

Received: April 20, 2020
Accepted: December 14, 2020

Contact information:

Mikhail V. Bolgov — bolgovmv@mail.ru